第45講　空間ベクトル(1)

例題45－1

(1)　点P(1，2，3)に対して，次の点の座標を求めよ．

(ア)　xy 平面に関して対称な点A

(イ)　yz 平面に関して対称な点B

(ウ)　zx 平面に関して対称な点C

(エ)　x 軸に関して対称な点D

(オ)　y 軸に関して対称な点E

(カ)　z 軸に関して対称な点F

(キ)　点(0，-1，5)に関して対称な点G

(2)　2点A(1，1，0)，B(3，-2，4)の間の距離を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 45 ー 1

(1)　点 P$(-2,\ 1,\ -1)$ に対して，次の点の座標を求めよ．

　(ア)　xy 平面に関して対称な点 A　　(イ)　z 軸に関して対称な点 B

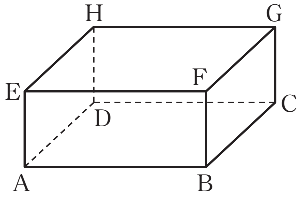
　(ウ)　点 $(1,\ -1,\ 0)$ に関して対称な点 C

(2)　2 点 A$(3,\ 2,\ 1)$，B$(1,\ 4,\ -1)$ の間の距離を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 45 － 2

直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする．このとき $\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{GB}$，$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{BH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．



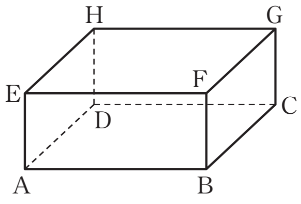
【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 45 − 2

直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ.



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 45 − 3

(1) $\vec{a}=(1,\ -1,\ 2)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ 1)$，$\vec{c}=(2,\ -1,\ -2)$ のとき，$|\vec{a}|$ を求めよ．また，$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ の成分とその大きさを求めよ．

(2) $\vec{a}=(1,\ -2,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ -2)$，$\vec{c}=(3,\ -2,\ -2)$ のとき，$\vec{p}=(-2,\ 3,\ -2)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 45 － 3

(1)　$\vec{a}=(3,\ 1,\ 4)$，$\vec{b}=(-1,\ 6,\ 3)$，$\vec{c}=(-2,\ 5,\ 4)$ のとき，$|\vec{c}|$ を求めよ．また，$2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$ の成分とその大きさを求めよ．

(2)　$\vec{a}=(0,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 2,\ -3)$，$\vec{c}=(3,\ 4,\ -1)$ のとき，$\vec{p}=(-6,\ 7,\ -3)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 45 ー 4

3 点 A(2, 1, 0), B(0, 2, 1), C(1, 0, 2) とするとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ のなす角を求めよ．また，△ABC の面積を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 45 ー 4

3点 A(2, 1, 2), B(4, 3, 6), C(4, 1, 4) とするとき，2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ のなす角を求めよ．また，△ABC の面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 45 講　空間ベクトル(1)

(1)　点 P(3, −2, 1) に対し，点 A(−3, −2, 1) は［ア］に関して対称な点であり，点 B(−3, −2, −1) は［イ］に関して対称な点である．［ア］，［イ］に当てはまるものを次の①〜⑥の中から選べ．

①　xy 平面　　②　yz 平面　　③　zx 平面

④　x 軸　　⑤　y 軸　　⑥　z 軸

(2)　$\vec{a}=(2,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 2,\ -1)$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}=($［ウ］$+t,\ 1+$［エ］$t,\ 1-t)$ である．また，$\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値は $\dfrac{［カ］}{\sqrt{［オ］}}$ である．

(3)　3 点 A(−2, 1, 3)，B(−3, 1, 4)，C(−3, 3, 5) について，2 つのベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ のなす角は［キク］° であり，△ABC の面積は $\dfrac{［ケ］}{［コ］}$ である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 45 講　空間ベクトル(1)

例題 45 － 1

(1)　点 P(1, 2, 3) に対して，次の点の座標を求めよ．

(ア)　xy 平面に関して対称な点 A　(イ)　yz 平面に関して対称な点 B

(ウ)　zx 平面に関して対称な点 C　(エ)　x 軸に関して対称な点 D

(オ)　y 軸に関して対称な点 E　(カ)　z 軸に関して対称な点 F

(キ)　点 (0, −1, 5) に関して対称な点 G

(2)　2 点 A(1, 1, 0)，B(3, −2, 4) の間の距離を求めよ．

(1)　(ア)　**A(1, 2, −3)**　(イ)　**B(−1, 2, 3)**　(ウ)　**C(1, −2, 3)**

(エ)　**D(1, −2, −3)**　(オ)　**E(−1, 2, −3)**　(カ)　**F(−1, −2, 3)**

(キ)　**G(−1, −4, 7)**

(2)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(-2-1)^2+(4-0)^2}=\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}=\boldsymbol{\sqrt{29}}$

類題 45 － 1

(1)　点 P(−2, 1, −1) に対して，次の点の座標を求めよ．

(ア)　xy 平面に関して対称な点 A　(イ)　z 軸に関して対称な点 B

(ウ)　点 (1, −1, 0) に関して対称な点 C

(2)　2 点 A(3, 2, 1)，B(1, 4, −1) の間の距離を求めよ．

(1)　(ア)　**A(−2, 1, 1)**　(イ)　**B(2, −1, −1)**　(ウ)　**C(4, −3, 1)**

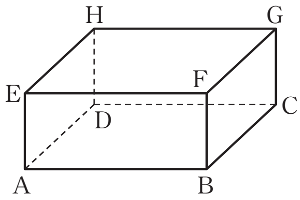
(2)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(1-3)^2+(4-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-2)^2}=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

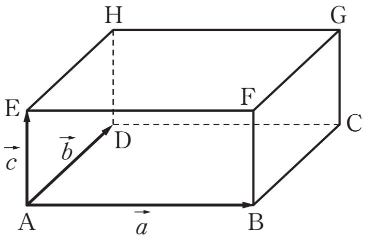
例題 45 − 2

直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とする．このとき $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ.



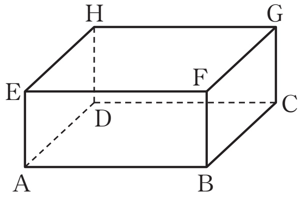
$\overrightarrow{\mathbf{AF}}=\vec{a}+\vec{c}$　　$\overrightarrow{\mathbf{GB}}=\overrightarrow{\mathrm{HA}}=-\vec{b}-\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathbf{AG}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　　$\overrightarrow{\mathbf{BH}}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$



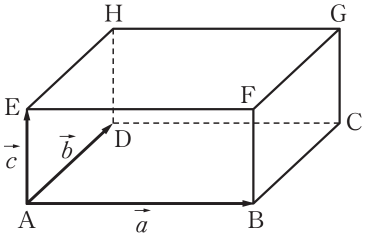
類題 45 − 2

直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ.



$\overrightarrow{\mathbf{AC}}=\vec{a}+\vec{b}$　　$\overrightarrow{\mathbf{HC}}=\overrightarrow{\mathrm{EB}}=\vec{a}-\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathbf{EC}}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$　　$\overrightarrow{\mathbf{DF}}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 45 − 3

(1)　$\vec{a}=(1,\ -1,\ 2)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ 1)$，$\vec{c}=(2,\ -1,\ -2)$ のとき，$|\vec{a}|$ を求めよ．また，$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ の成分とその大きさを求めよ．

(2)　$\vec{a}=(1,\ -2,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ -2)$，$\vec{c}=(3,\ -2,\ -2)$ のとき，$\vec{p}=(-2,\ 3,\ -2)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ．

(1)　$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=2(1,\ -1,\ 2)-3(0,\ 2,\ 1)+(2,\ -1,\ -2)$

$=(2,\ -2,\ 4)+(0,\ -6,\ -3)+(2,\ -1,\ -2)=\boldsymbol{(4,\ -9,\ -1)}$

$|2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{4^2+(-9)^2+(-1)^2}=\sqrt{98}=\boldsymbol{7\sqrt{2}}$

(2)　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおくと

$(-2,\ 3,\ -2)=s(1,\ -2,\ -1)+t(1,\ -1,\ -2)+u(3,\ -2,\ -2)$

つまり　$(-2,\ 3,\ -2)=(s+t+3u,\ -2s-t-2u,\ -s-2t-2u)$

よって　$s+t+3u=-2$　……①　$-2s-t-2u=3$　……②

$-s-2t-2u=-2$　……③

①＋②より　$-s+u=1$　　①×2＋③より　$s+4u=-6$

よって　$s=-2,\ u=-1$　このとき①より　$t=3$

したがって　$\boldsymbol{\vec{p}=-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}}$

類題 45 − 3

(1)　$\vec{a}=(3,\ 1,\ 4)$，$\vec{b}=(-1,\ 6,\ 3)$，$\vec{c}=(-2,\ 5,\ 4)$ のとき，$|\vec{c}|$ を求めよ．また，$2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$ の成分とその大きさを求めよ．

(2)　$\vec{a}=(0,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 2,\ -3)$，$\vec{c}=(3,\ 4,\ -1)$ のとき，$\vec{p}=(-6,\ 7,\ -3)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ．

(1)　$|\vec{c}|=\sqrt{(-2)^2+5^2+4^2}=\sqrt{45}=\boldsymbol{3\sqrt{5}}$

$2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}=2(3,\ 1,\ 4)+(-1,\ 6,\ 3)-3(-2,\ 5,\ 4)$

$=(6,\ 2,\ 8)+(-1,\ 6,\ 3)+(6,\ -15,\ -12)=\boldsymbol{(11,\ -7,\ -1)}$

$|2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}|=\sqrt{11^2+(-7)^2+(-1)^2}=\sqrt{171}=\boldsymbol{3\sqrt{19}}$

(2)　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおくと

$(-6,\ 7,\ -3)=s(0,\ 1,\ 1)+t(-1,\ 2,\ -3)+u(3,\ 4,\ -1)$

つまり　$(-6,\ 7,\ -3)=(-t+3u,\ s+2t+4u,\ s-3t-u)$

よって　$-t+3u=-6$　……①　$s+2t+4u=7$　……②　$s-3t-u=-3$　……③

②−③より　$t+u=2$　　これと①より　$t=3,\ u=-1$　　このとき②より　$s=5$

したがって　$\boldsymbol{\vec{p}=5\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 45 ー 4
3点 A(2, 1, 0), B(0, 2, 1), C(1, 0, 2) とするとき，2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ のなす角を求めよ．また，△ABC の面積を求めよ．

$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 1,\ 1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,\ -1,\ 2)$ より

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$　　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2)\times(-1)+1\times(-1)+1\times2=3$

よって　$\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\angle BAC\leqq180^\circ$ より　$\angle BAC=\mathbf{60^\circ}$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin60^\circ=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

類題 45 ー 4
3点 A(2, 1, 2), B(4, 3, 6), C(4, 1, 4) とするとき，2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ のなす角を求めよ．また，△ABC の面積を求めよ．

$\overrightarrow{AB}=(2,\ 2,\ 4)$, $\overrightarrow{AC}=(2,\ 0,\ 2)$ より

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+2^2+4^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$　　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2+2\times0+4\times2=12$

よって　$\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{12}{2\sqrt{6}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\angle BAC\leqq180^\circ$ より　$\angle BAC=\mathbf{30^\circ}$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin30^\circ=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第45講　空間ベクトル(1)

(1)　点P(3, −2, 1)に対し，点A(−3, −2, 1)は **ア** に関して対称な点であり，点B(−3, −2, −1)は **イ** に関して対称な点である．**ア**，**イ** に当てはまるものを次の①〜⑥の中から選べ．

①　xy 平面　②　yz 平面　③　zx 平面

④　x 軸　⑤　y 軸　⑥　z 軸

(2)　$\vec{a}=(2, 1, 1)$，$\vec{b}=(1, 2, -1)$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}=($ **ウ** $+t, 1+$ **エ** $t, 1-t)$ である．また，$\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値は $\dfrac{\boxed{カ}}{\sqrt{\boxed{オ}}}$ である．

(3)　3点A(−2, 1, 3)，B(−3, 1, 4)，C(−3, 3, 5)について，2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ のなす角は **キク**° であり，△ABCの面積は $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である．

解答例

(1)　点P(3, −2, 1)に対し，点A(−3, −2, 1)は yz 平面（②）に関して対称な点であり，点B(−3, −2, −1)は y 軸（⑤）に関して対称な点　である．

(2)　$\vec{a}+t\vec{b}=(2, 1, 1)+t(1, 2, -1)=(\mathbf{2}+t, 1+\mathbf{2}t, 1-t)$

$$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(2+t)^2+(1+2t)^2+(1-t)^2}=\sqrt{6t^2+6t+6}=\sqrt{6\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}}$$

よって　$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき　最小値 $\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$

(3)　$\overrightarrow{AB}=(-1, 0, 1)$，$\overrightarrow{AC}=(-1, 2, 2)$ より

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$　　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)\times(-1)+0\times2+1\times2=3$

よって　$\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{3}{\sqrt{2}\times3}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\angle BAC\leqq180^\circ$ より　$\angle BAC=\mathbf{45}^\circ$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin45^\circ=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times3\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。